2023

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-B-1

(Advanced Calculus)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ *denote the set of real numbers and the set of natural numbers respectively.*

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক উত্তরটি লেখো ঃ ১×১০

(ক) $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি, যেখানে $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, 0 \le x \le 1$

(অ) সমভাবে $[0, 1]$ অন্তরালে অভিসারী হবে

(আ) অসমভাবে $[0, 1]$ অন্তরালে অভিসারী হবে

(ই) সমভাবে $(0, 1)$ অন্তরালে অভিসারী হবে

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(খ) যদি $\sum \dfrac{\cos nx}{n^p}$ শ্রেণিটি সমভাবে x এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য অভিসারী হয়, তাহলে $p =$

(অ) $\dfrac{1}{4}$ (আ) $\dfrac{3}{2}$

(ই) $\dfrac{2}{3}$ (ঈ) $\dfrac{1}{2}$।

(গ) $\sum \dfrac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$ ঘাত শ্রেণিটির অভিসারী অন্তরাল হল

(অ) $(-1, 3)$ (আ) $[-1, 3)$

(ই) $(-4, 4)$ (ঈ) $(-e, e)$।

(ঘ) $\sum \dfrac{(n-1)!}{n^n} x^n$ ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ হল

(অ) 1 (আ) e

(ই) 2 (ঈ) 4।

(ঙ) $\cos 2\pi x$-এর পর্যায়কাল হল

(অ) 2π (আ) 1

(ই) 2 (ঈ) কোনোটিই নয়।

(চ) যদি $f(x) = x + x^2,\ -\pi < x < \pi$ অপেক্ষকটি Fourier শ্রেণিতে $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$ রূপে প্রকাশিত হয়, তাহলে a_0-এর মান হবে

(অ) $\frac{1}{3}\pi^2$ (আ) $\frac{2}{3}\pi^2$

(ই) $2\pi^2$ (ঈ) π^2।

(ছ) $L\left\{\frac{e^{at}-1}{a}\right\} =$

(অ) $\frac{1}{S(S-a)}$ (আ) $\frac{1}{a(S-a)}$

(ই) $\frac{S}{S-a}$ (ঈ) $\frac{a}{S-a}$।

(জ) $L\left\{te^{2t}\right\} =$

(অ) $\frac{1}{S-2}$ (আ) $2(S-2)^2$

(ই) $\frac{1}{(S-2)^2}$ (ঈ) $\frac{1}{S^2}$।

(ঝ) $L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2-8S+17}\right\} =$

(অ) $e^{4t}\cos t$ (আ) $\sin 4t$

(ই) $e^{4t}\sin t$ (ঈ) $e^{-4t}\sin t$।

(ঞ) একটি অযুগ্ম অপেক্ষকের Fourier শ্রেণিতে শুধুমাত্র থাকবে

(অ) Cosine Terms (আ) Sine Terms

(ই) Sine এবং Cosine Terms উভয় (ঈ) কিছুই বলা যাবে না।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৩

(ক) $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটির Limit অপেক্ষক নির্ণয় করো, যেখানে $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, x\in[0,1]$ ।

(খ) $f(x)=e^x$ অপেক্ষকটিকে $0\le x\le \pi$ অন্তরালে Half range cosine Fourier শ্রেণিতে বিস্তৃত করো।

(গ) $x+\dfrac{2^2x^2}{2!}+\dfrac{3^3x^3}{3!}+\ldots$ ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(ঘ) $L\{\sin(7t+5)\}$ -র মান নির্ণয় করো।

(ঙ) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S\left(S^2+1\right)}\right\}$ নির্ণয় করো।

৩। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) (অ) একটি ঘাত শ্রেণির অভিসরণ ব্যাসার্ধের সংজ্ঞা দাও।

(আ) দেখাও যে, $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots, -1<x<1$, যেখানে $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots,$ $|x|<1$ । Abel's Theorem ব্যবহার করে দেখাও যে, $\log 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots$ ২+(৫+৩)

(খ) (অ) অপেক্ষক শ্রেণির সমভাবে অভিসারী হওয়ার জন্য Weierstrass M-test-টি বিবৃত করো।

(আ) Weierstrass M-test ব্যবহার করে দেখাও যে, $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি [0, 1] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী, যেখানে $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}, x\in[0,1], n\in\mathbb{N}$ । যদি $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের Limit অপেক্ষক f হয়, তাহলে দেখাও যে, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)\ne f'(0)$ । ২+(৫+৩)

(গ) $f(x)=|x|, -1\le x\le 1$ অপেক্ষকটির Fourier শ্রেণিটি নির্ণয় করো। এর সাহায্যে দেখাও যে, $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{8}$ ।
৭+৩

(ঘ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}-x, & 0<x\le\dfrac{1}{2}\\ x-\dfrac{3}{4}, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$ হলে $f(x)$ অপেক্ষকটির Half range Fourier sine শ্রেণিটি নির্ণয় করো। কীভাবে $f(x)$ অপেক্ষকটি $x=0$ তে সংজ্ঞাত হবে যাতে শ্রেণিটি $f(x)$-এ অভিসারিত হয়? ৭+৩

(ঙ) (অ) $L\left\{\frac{e^{-bt}\sin at}{t}\right\}$-এর মান নির্ণয় করো।

(আ) $L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2(S+1)}\right\}$-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $L\{f(t)\}=F(S)$। ৫+৫

(চ) (অ) অপেক্ষক $f(t)$-এর Laplace transform নির্ণয় করো, যেখানে $f(t)=\begin{cases}0, & 0<t\le 1\\ t, & 1<t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$

(আ) Laplace transform ব্যবহার করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0;\ y(0)=0,\ y(1)=2$$ ৪+৬

(ছ) (অ) $L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(S^2+1\right)\left(S^2+9\right)}\right\}$-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $L\{f(t)\}=F(S)$।

(আ) Laplace transform-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো ঃ ৪+৬

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^{-t},\ \text{given that}\ \ y(0)=0=y'(0).$$

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Write the correct answer : 1×10

(a) The sequence of functions $\{f_n(x)\}$, where $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}, 0\le x\le 1$, is

(i) uniformly convergent on [0, 1]

(ii) not uniformly convergent on [0, 1]

(iii) uniformly convergent on (0, 1)

(iv) none of the above.

(b) If the series $\sum \frac{\cos nx}{n^p}$ is uniformly convergent for all real values of x, then $p =$

(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{2}$

(iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{1}{2}$.

(c) The interval of convergence of the power series $\sum \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$ is

(i) $(-1, 3)$ (ii) $[-1, 3)$

(iii) $(-4, 4)$ (iv) $(-e, e)$.

(d) The radius of convergence of the power series $\sum \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$ is

(i) 1 (ii) e

(iii) 2 (iv) 4.

(e) The period of $\cos 2\pi x$ is

(i) 2π (ii) 1

(iii) 2 (iv) None of these.

(f) If $f(x) = x + x^2$, $-\pi < x < \pi$ be presented in Fourier series as $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, then the value of a_0 will be

(i) $\frac{1}{3}\pi^2$ (ii) $\frac{2}{3}\pi^2$

(iii) $2\pi^2$ (iv) π^2.

(g) $L\left\{\frac{e^{at}-1}{a}\right\} =$

(i) $\frac{1}{S(S-a)}$ (ii) $\frac{1}{a(S-a)}$

(iii) $\frac{S}{S-a}$ (iv) $\frac{a}{S-a}$.

(h) $L\left\{te^{2t}\right\} =$

(i) $\dfrac{1}{S-2}$ (ii) $2(S-2)^2$

(iii) $\dfrac{1}{(S-2)^2}$ (iv) $\dfrac{1}{S^2}$

(i) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S^2-8S+17}\right\} =$

(i) $e^{4t}\cos t$ (ii) $\sin 4t$

(iii) $e^{4t}\sin t$ (iv) $e^{-4t}\sin t$

(j) The Fourier series of an odd function contains only

(i) Cosine Terms (ii) Sine Terms

(iii) both Sine and Cosine Terms (iv) Nothing can be said.

2. Answer ***any three*** questions : 5×3

(a) Find the limit function of the sequence of functions $\{f_n(x)\}$, where $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in [0,1]$.

(b) Expand the function $f(x) = e^x$ in a half range Fourier cosine series in $0 \le x \le \pi$.

(c) Find the radius of convergence of the power series $x + \dfrac{2^2 x^2}{2!} + \dfrac{3^3 x^3}{3!} + \dots$.

(d) Find the value of $L\{\sin(7t+5)\}$.

(e) Find the value of $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S\left(S^2+1\right)}\right\}$.

3. Answer ***any four*** questions :

(a) (i) Define the radius of convergence of a power series.

(ii) Assuming the power series expansion for $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1$, show that, $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots, -1 < x < 1$. By using Abel's theorem deduce that, $\log 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$. 2+(5+3)

(b) (i) State Weierstrass M-test for uniform convergence of sequence of functions.

(ii) Using Weierstrass M-test show that, the sequence of function $\{f_n(x)\}$ converges uniformly on $[0, 1]$, where $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. If f be the limit function of $\{f_n(x)\}$, then show that $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\, f_n'(0) \neq f'(0)$. 2+(5+3)

(c) Find the Fourier series of the function $f(x) = |x|$ in $-1 \le x \le 1$. Hence show that, $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{8}$. 7+3

(d) Let $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - x, & 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{3}{4}, & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$. Find the Half range Fourier sine series of $f(x)$. How would $f(x)$ be defined at $x = 0$ so that the series converges to $f(x)$? 7+3

(e) (i) Evaluate $L\left\{\dfrac{e^{-bt}\sin at}{t}\right\}$.

(ii) Evaluate $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{S^2(S+1)}\right\}$, where $L\{f(t)\} = F(S)$. 5+5

(f) (i) Find the Laplace transform of the function $f(t)$, where, $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1 \\ t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$.

(ii) Using Laplace transform, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0; \text{ given that } y(0) = 0, y(1) = 2$$

4+6

(g) (i) Evaluate $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(S^2+1\right)\left(S^2+9\right)}\right\}$, where $L\{f(t)\} = F(S)$.

(ii) Using Laplace transform, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-t}, \text{ given that } y(0) = 0 = y'(0).$$

4+6